

Весовые коэффициенты

12 июля

1. По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой — цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой — цифру 3. На дугах между одноцветными точками поставили 0. Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.
2. Одна бактерия сидит в точке $(0, 0)$. За ход одна бактерия в точке (i, j) пропадает, а в точках $(i + 1, j)$ и $(i, j + 1)$ появляется по бактерии — если обе эти клетки до хода были пусты. Докажите, что хотя бы в одной клетке с суммой координат не более 3 всегда будет хотя бы одна бактерия.
3. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что хотя бы $N - n + 1$ камень попал в кучки большего размера, чем те, в которых они лежали изначально.
4. Клетки доски $m \times n$ покрашены в два цвета. Известно, что на какую бы клетку ни поставить ладью, она будет бить больше клеток не того цвета, на котором стоит (клетка под ладьей тоже считается побитой). Докажите, что на каждой вертикали и каждой горизонтали клеток обоих цветов поровну.
5. Есть бесконечно много комнат в ряд, в некоторых живут пианисты (всего их конечное число, в комнате может жить несколько пианистов). Каждый день одна пара пианистов в соседних комнатах решает, что они мешают друг другу играть, и разъезжается — левый пианист в соседнюю комнату слева, а правый пианист — в соседнюю комнату справа. Докажите, что через некоторое время переселения прекратятся.
6. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по несколько в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:
 1. Снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n и положить один камень в клетку $n + 1$;
 2. Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n + 1$ и $n - 2$.Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).
7. В квадрат 10×10 по порядку расставлены числа от 1 до 100. За ход можно: выбрать число, и прибавить к нему 2, а из двух соседей, лежащих с ней на одной прямой, вычесть по 1. Или, наоборот: отнять 2 и прибавить к двум соседям по 1. В конце снова получилась расстановка чисел от 1 до 100. Докажите, что она совпала с исходной.

8. За круглым столом сидят $2n$ человек, у которых есть m печенек на всех. Любой человек, у которого есть хотя бы две печеньки, может съесть одну из них и дать одну печенку соседу. Один из сидящих за столом — Вася. При каком наименьшем m люди, сидящие за столом, при любом начальном распределении печенек смогут добиться того, чтобы Вася получил хотя бы одну печенку?

9. Есть две полосы длиной k . В самой левой клетке каждой из полосок стоит $n < 2^{k-3}$ фишек. Петя и Вася играют в игру: Петя ходит первым и своим ходом двигает своим ходом произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Вася снимает с поля все только что сдвинутые фишки на одной из полосок по своему выбору. Докажите, что Вася сможет сделать так, что ни одна из фишек ни на секунду не окажется на правой клетке.